2013학년도 모의 논술고사

자연계열 논술문제

지원학과 :	수험번호 :	성명 :

[제시문 1]은 <문제 1>, <문제 2>에 해당하며, [제시문 2]는 <문제 3>, <문제 4>, <문제 5>에 해당합니다. 각 제시문은 일반적인 과학, 수학적 원리를 담고 있습니다. 제시문을 잘 읽고 그 내용에 근거하여 수식과 논리를 명확히 전개하여 답하시오.

[제시문 1]

(가) 과학사적으로 특정 다세포 생물체가 일정한 형태를 갖추는 것과 관련하여 2가지 측면에서 설명하여 왔다. 하나는 수정난 속에 이미 그 생명체의 형태를 갖추고 있는 축소된 형태의 생명체가 들어있어 단순히 성장하여 특정 형태를 가진 생명체가 될 것이라는 것이고, 두 번째는 형태가 규정된 상태의 것이 아닌 무형의 상태에서 주어진 위치 정보와 시간 정보를 이용하여 발생과정을 거치면서 일정한 형태를 갖춰 우리가 인식하는 생물체가 될 것이라는 것이다. 이는 매우 흥미로운 추정으로 현대에 와서는 두 번째 것이 개체 발생에서 관찰되는 현상으로 인지되고 있다.

표범 수정란은 난할을 통하여 포배가 되고 이후 낭배형성과정을 거쳐 개체로 발생하게 된다. 수정란은 1개의 세포로 난할을 통하여 100개 이상의 세포를 갖는 둥근 원구 모양의 포배가 되고 이후 세포 분열을 통한 세포의 지속적 증가와 함께 3개의 층으로 명명되는 외배엽, 중배엽, 내배엽으로 세포가 이동하여 재배치되면서 형태의 변화가 시작된다. 이러한 변화는 척삭을 기준으로 한 세포의 배열과, 위치 특이적인 특정 유도물질의 발현, 그리고 이들 유도물질의 농도에 따른 유도에 의하여 진행된다. 또한 시기 특이적으로 이미 형성된 특정 구조에 의해 추후의 형태형성이 유도된다.

피부의 외형적 형태는 피부를 구성하는 세포들이 어떤 형태로 어떻게 짜여 있고 어떤 물질을 생합성하는 가에 의해 결정된다. 피부라는 국부적 조직의 형태는 3차원이다. 개체 수준에서도 당연히 3차원이다. 표범을 예로 들어보면 해부학적으로 머리 부분은 앞, 꼬리부분은 뒤, 하늘 쪽 부분은 등, 땅 쪽 부분은 배, 그리고 오른쪽, 왼쪽으로 방향을 규정할 수 있다. 표범은 이렇게 앞, 뒤, 등, 배, 오른쪽, 왼쪽에 각각의 모습을 갖춘다.

피부는 상피와 진피로 구성되는데 이는 한 종류의 세포로 구성된 것이 아니라 외배엽과 중배엽에서 유래한 여러 종류의 세포로 되어있다. 케라틴화된 각질세포, 각질화 단계의 세포, 자극에 반응하여 분열할 수 있는 세포, 털 구조물을 생성하는 여포세포, 지질을 분비하는 피지세포, 땀을 분비하는 땀세포 등의 상피와 섬유아세포, 기질세포, 혈관, 신경, 지방세포, 색소세포 등으로 구성된 진피이다.

표피의 착색은 색소세포의 배열과 수에 의해 결정된다. 색소세포는 외배엽성 신경능선세포에서 유래하는데, 색소세포로 될 신경능선세포는 위치할 장소의 피부로 이동하면서 세포분열을 통하여 그 수를 증가시킨다. 이동 이후 위치 특이적으로 분열하여 일정 수를 만들고 특정 색소를 분비하는 색소세포로 분화하는데, 색소세포의 대표적인 것으로는 생합성하는 색소의 색과 특성에 따라 멜라닌세포, 황색세포, 적색세포, 은색세포가 있다. 표범의 털은 옅은 우윳빛 노란색 바탕위에 검은색 무늬로 수놓아져 있다. 이는 검은색을 합성하는 멜라닌 세포와 황색을 합성하는 황색 세포, 그리고 은색이 표출되는 은색세포의 일정한 배열에 의한다. 검은색 무늬의 좁고 넓음은 단위 면적당 멜라닌을 합성하는 색소세포 즉 멜라닌세포의 일정 수가 어느 만큼의 면적을 차지하고 있는가에 의존한다. 발생 중인 세포의 일반적인 증식 속도는 24시간인데 세포 유형에 따라 그 속도가 다르다.

포유류의 표피 무늬는 배아 발생과정의 후기에 완성되지만, 그 이전에 미리 조성되어 깔려있는 사전 패턴을 반영한다. 또한 세포내에서 진행되는 화학반응인 물질대사의 정도에 의한 영향도 반영한다. 얼룩말의 경우, 전체 잉태기간 360일 정도에서 처음 21일에서 35일 사이에 표피 무늬의 사전 패턴이 형성된다. 그리고 발생의 과정에서 표피 무늬 형성은 개체의 형태가 갖추어지는 형태형성이후 발생단계에서 일어난다. 이는 외배엽과 중배엽에서 유래한 세포가 발생중인 개체의 특정위치에 위치하여 구조를 형성한 이후 상호작용을 통하여 진행되는 것으로 알려져 있다. 물론 유전자가 중대한 역할을 하고, 발생의 메커니즘들이 유전자에 의하여 조절되는 것은 틀림없으나, 유전자 자체가 패턴을 만들어낼 수는 없다.

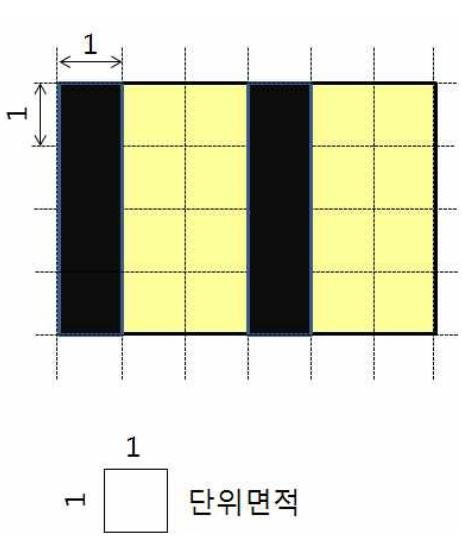
어떻게 세포가 일정한 규칙을 가지고 특정 조직, 기관을 신체의 특정 부위에 배열하게 할 까? 즉 해부학적으로 보면 앞-뒤 축, 등-배 축, 좌-우 축을 중심으로 특정 세포로 구성된 조직, 기관 들이 배열되어 있다. 이러한 결과적 현상은 발생과정 동안 세포의 증식과 함께 특성이 일정한 세포가 군을 이룬다는 것을 의미한다. 종합해보면 생물체의 발생은 3차원적인 것이 아니라 발생 시기에 따라 점진적으로 형성된다는 측면에서 4차원적인 것이다. 기관이 이처럼 각 발생 시기에 축을 따라 배열되듯이 표피 무늬도 배열된다.

(나) 검은색 무늬의 동물 표피 착색 현상은 피부 표층 바로 아래의 색소 세포에서 생성되는 멜라닌의 분포로 나타나며 규칙적인 반복성을 갖는 것이 특징 중의 하나이다. 1981년 발표된 동물 표피 무늬 형성 메커니즘에 관한 수학 논문에서 머레이(Murray)는 한 동물 종류에 공통적으로 나타나는 표피 무늬 패턴들은 한 가지 메커니즘에 의하여 생성되는 것으로 설명

자연계열 논술문제

할 수 있다고 제안하였다. 이 메커니즘은 동물 발생의 배아 단계에서 형태형성인자의 농도 의존적인 사전 패턴(pre-patterns)에 관한 반응-확산 시스템에 기초하며, 이후의 세포분열에서 이 사전 패턴에 의거하여 특정 색소세포가 멜라닌을 생성한다는 것이다. 즉 일정한 분포를 보이는 두 물질이 상호작용하여 안정적인 형태를 만들어 내는 반응-확산 모델을 가정하였을 때 이 두 물질의 농도 차이는 지역적 특성을 나타낼 수 있어 특정 형태를 만들어 혼돈된 상태에서 순차적인 구조를 만들어 낼 수 있다. 이때 관여하는 두 가지 물질 P와 S가 존재하는데, P는 P와 S의 생산량을 더 증가시키는 쪽으로 작용하고, 반대로 S는 물질 P의 생산을 억제한다. 만약 S가 P보다 빨리 확산하면 둘 간의 양적 차이에서 P의 증가를 빨리 인식할 수 있게 된다. 이러한 파동이 특정 화학반응에서 관찰된다. '순차적'이라는 말에서 알 수 있듯이 이때 시간적 요인이 고려되어 있어 시간의 흐름에 따라 특정 패턴이 나타난다는 것이다. 유전자 발현 조절과 관련하여 이 모델이 가지는 한계는 있으나, 복잡한 시스템을 상대적으로 단순한 모델로 추상화하여 기본적인 작용원리를 연구할 때 매우 유용하다.

<문제 1> 다음 그림은 위 모델을 바탕으로 작성한 것이다. 검정색은 단위면적 당 16개의 멜라닌색소세포가 있을 때, 옅은 우윳빛 노란색은 단위 면적당 8개의 황색세포가 있을 때 나타난다. 두 종류의 색에 대한 단위면적 당 색소세포의 분열 횟수 차이를 구하고, 그림과 같은 패턴의 색을 발하기 위해 걸리는 세포분열 과정의 최소 시간을 구하시오. (단, 한 개의 세포는 1회 분열 시 2개의 세포로 나눠지고, 이러한 과정 각각을 '1회 분열한 것'이라고 정의하자. 한 개의 멜라닌세포와 한 개의 황색세포에서 시작하여 그림의 패턴 전체를 채운다고 하고, 또 세포가 1회 분열하는데 걸리는 시간은 24시간이라고 가정한다).



<문제 2> (나)의 핵심내용을 찾아 서술하고, 그 근거를 (가)에서 찾아 제시하시오.

2013학년도 모의 논술고사

자연계열 논술문제

[제시문 2]

동물의 표피무늬 형성 원리에 대한 한 이론은 발생과정의 초기에 표피무늬의 사전패턴(pre-pattern)이 배아의 표면에 형성된다고 주장한다. 이 사전패턴은 멜라노사이트(melanocytes)라는 특화된 색소세포가 멜라닌을 생성하도록 하거나 생성하지 못하도록 하는 두 종류의 화학물질에 의해 만들어진다고 한다. 멜라노사이트가 멜라닌을 생성하도록 지시하는 화학물질을 활성인자(activator), 멜라닌을 생성하지 못하도록 억제하는 화학물질을 억제인자(inhibitor)라고 부른다. 동물 배아의 몸통을 펼쳐 놓은 모양을 단순화시켜 좌표평면 위의 사각형 정의역 $\{(x,y)\,|\,-a/2 \le x \le a/2,\ 0 \le y \le b\}$로 나타내고, 활성인자와 억제인자의 농도를 각각 함수 $A(x,y)$와 $I(x,y)$로 나타내어 $A(x,y) \ge I(x,y)$인 영역이 짙은 색을 띠게 됨으로써 형성되는 무늬를 살펴보도록 하자.

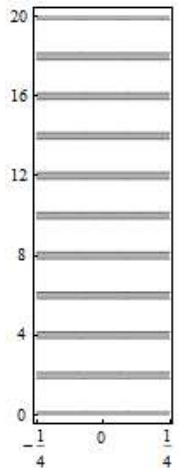
사각형 정의역의 위와 아래 경계는 동물 몸통에서 머리와 꼬리 쪽을 각각 나타내며, 좌우 경계는 몸통을 편의상 펼쳐놓은 것이므로 양쪽 경계에서 함수의 값이 같아야 한다. 이러한 조건을 만족하는 함수 A와 I의 아주 단순한 예로 다음과 같은 형태를 생각해보자.

$$A(x,y) = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \qquad I(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{.....㉠}$$

$$0 \le \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \le 2 \qquad (\text{단, } n, m \text{은 음이 아닌 정수}) \qquad \text{.....㉡}$$

조건 ㉡을 만족하는 n, m을 찾는 문제는 정의역인 사각형의 가로길이 a와 세로길이 b의 비율과 밀접한 관련이 있다.

먼저, $a = 1/2,\ b = 20$인 경우를 생각해보자. 조건 ㉡에서 $0 \le \frac{n^2}{(1/2)^2} + \frac{m^2}{20^2} \le 2$를 만족하는 음이 아닌 정수 n, m은 $n = 0,\ m = 0, 1, 2, \cdots, 28$ 이다. 따라서 $A(x,y) = \cos\left(\frac{m\pi y}{20}\right),\ I(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.



이때, $m = 0$이면 $A(x,y) \ge I(x,y)$인 영역은 공집합이 되므로, 정의역 안에 무늬가 나타나지 않는다.
또, 예를 들어 $m = 20$이면 $A(x,y) \ge I(x,y)$인 영역은 여러 개의 띠무늬로 구성된다. 즉, $\cos\left(\frac{20\pi y}{20}\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$으로부터 정의역 안에서 부등식 $0 \le y \le \frac{1}{6},\ 2-\frac{1}{6} \le y \le 2+\frac{1}{6},\ 4-\frac{1}{6} \le y \le 4+\frac{1}{6},$ $\cdots,\ 18-\frac{1}{6} \le y \le 18+\frac{1}{6},\ 20-\frac{1}{6} \le y \le 20$을 만족하는 부분들이므로 오른쪽 그림에서 색칠된 영역이다.

다음으로, $a = 8,\ b = 10$인 경우를 생각해보자. 이 경우에는 조건 ㉡에서 $0 \le \frac{n^2}{8^2} + \frac{m^2}{10^2} \le 2$를 만족하는 양의 정수 n, m의 쌍들이 존재한다. 예를 들어 $n = 8, m = 10$이면 $A(x,y) = \cos\left(\frac{8\pi x}{8}\right)\cos\left(\frac{10\pi y}{10}\right) = \cos(\pi x)\cos(\pi y),\ I(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.
이때 $A(x,y) \ge I(x,y)$인 영역을 나타내려면 부등식

$$\cos(\pi x)\cos(\pi y) \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{.....㉢}$$

을 만족하는 영역을 찾아야 한다. 먼저, 부등식 ㉢을 만족하는 점 (x,y)는

$$|\pi x - 2k_1\pi| \le \frac{\pi}{6}, \qquad |\pi y - 2k_2\pi| \le \frac{\pi}{6} \qquad (k_1,\ k_2\text{는 정수}) \qquad \text{.....㉣}$$

이나, 또는

$$|\pi x - (2k_1+1)\pi| \le \frac{\pi}{6}, \qquad |\pi y - 2(k_2+1)\pi| \le \frac{\pi}{6} \qquad (k_1,\ k_2\text{는 정수}) \qquad \text{.....㉤}$$

을 만족해야 한다. 조건 ㉣이나 ㉤을 만족하는 점 (x,y) 중에서 부등식 ㉢을 만족하는 것을 찾아야 하는데, 부등식 ㉢은 삼각함수를 포함하고 있어 풀기가 어려우므로, $|\theta_1| \le \frac{\pi}{6},\ |\theta_2| \le \frac{\pi}{6}$ 이면

$$\left|\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \left(1 - \frac{1}{2}(\theta_1)^2 - \frac{1}{2}(\theta_2)^2\right)\right| < 0.0251$$

이 성립한다는 사실을 이용하여 다음과 같은 근사식을 이용하기로 하자.

$$\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \approx 1 - \frac{1}{2}(\theta_1)^2 - \frac{1}{2}(\theta_2)^2 \qquad (\text{단, } |\theta_1| \le \frac{\pi}{6},\ |\theta_2| \le \frac{\pi}{6}) \qquad \text{.....㉥}$$

2013학년도 모의 논술고사

자연계열 논술문제

근사식 ㉥을 이용하면 $|\theta_1| \le \frac{\pi}{6}$, $|\theta_2| \le \frac{\pi}{6}$ 일 때 부등식 $\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$을 만족하는 영역은 부등식

$$1-\frac{1}{2}(\theta_1)^2-\frac{1}{2}(\theta_2)^2 \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{즉,} \quad (\theta_1)^2+(\theta_2)^2 \le 2-\sqrt{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{㉦}$$

을 만족하는 영역과 근사적으로 일치한다. 그리고 $2-\sqrt{3} < \left(\frac{\pi}{6}\right)^2$이므로, 부등식 ㉦을 만족하는 θ_1, θ_2는 ㉥의 조건 $|\theta_1| \le \frac{\pi}{6}$, $|\theta_2| \le \frac{\pi}{6}$ 를 자동적으로 만족한다. 이제 삼각함수의 주기성을 이용하면 k_1, k_2가 정수일 때,

$$\cos(\pi x)\cos(\pi y) = \cos(\pi x - 2k_1\pi)\cos(\pi y - 2k_2\pi) = \cos(\pi x-(2k_1+1)\pi)\cos(\pi y-(2k_2+1)\pi)$$

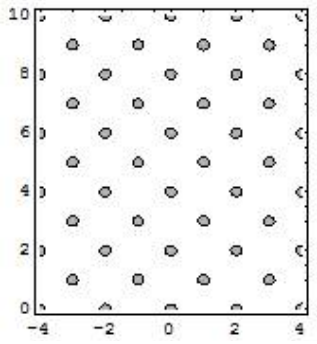
이므로, 부등식 $\cos(\pi x)\cos(\pi y) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$을 만족하는 영역은 ㉦으로부터 부등식

$$(\pi x-2k_1\pi)^2+(\pi y-2k_2\pi)^2 \le 2-\sqrt{3} \quad \text{또는} \quad (\pi x-(2k_1+1)\pi)^2+(\pi y-(2k_2+1)\pi)^2 \le 2-\sqrt{3}$$

을 만족하는 영역과 근사적으로 일치한다. 즉, 정수 k_1, k_2에 대하여

$$(x-2k_1)^2+(y-2k_2)^2 \le \frac{2-\sqrt{3}}{\pi^2} \quad \text{또는} \quad (x-(2k_1+1))^2+(y-(2k_2+1))^2 \le \frac{2-\sqrt{3}}{\pi^2}$$

을 만족하는 영역과 근사적으로 일치한다. 여기에서 $\frac{2-\sqrt{3}}{\pi^2} \approx (0.165)^2$ 이다. 따라서 정의역 안에서 부등식 $\cos(\pi x)\cos(\pi y) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$을 만족하는 영역은 오른쪽 그림과 같이 중심이 (짝수, 짝수), (홀수, 홀수)이고, 반지름이 약 0.165인 원들의 내부로 이루어진 영역과 근사적으로 일치한다.



동물 표피무늬형성에 관한 머레이(Murray, 1981)의 이론에 따르면 배아 발생과정 초기에 몸통과 꼬리의 표피 무늬 패턴은 같은 반응-확산 메커니즘에 의하여 생성되고, 따라서 몸통과 꼬리의 무늬 차이는 정의역의 가로와 세로의 길이에 의하여 결정된다. 위에서 살펴본 두 가지 분석의 결과를 비교하면, $a=1/2$, $b=20$으로 긴 직사각형 모양의 정의역에는 띠무늬가 나타나고, $a=8$, $b=10$으로 정사각형에 가까운 모양의 정의역에는 점무늬가 나타났다. 배아단계에서 일반적으로 몸통이 꼬리보다 넓기 때문에 치타, 재규어, 표범, 사향고양이 등과 같이 몸통은 점무늬, 꼬리는 띠무늬를 가지게 된다고 설명할 수 있다.

<문제 3> $a=1/3$, $b=10$일 때, 정의역 $\{(x,y) \mid -a/2 \le x \le a/2,\ 0 \le y \le b\}$ 안에서 ㉠과 ㉡을 만족하는 함수 $A(x,y)$와 $I(x,y)$에 대하여 부등식 $A(x,y) \ge I(x,y)$를 만족하는 영역이 가장 많은 수의 띠무늬로 구성될 때, 각 띠 무늬에 해당하는 y값의 범위를 모두 구하시오.

<문제 4> 부등식 ㉢을 만족하는 점 (x,y)는 조건 ㉣ 또는 ㉤을 만족해야 하는 이유를 설명하시오.

<문제 5> $a=8$, $b=10$인 경우에 조건 ㉡에서 $0 \le \frac{n^2}{8^2}+\frac{m^2}{10^2} \le 2$를 만족하는 양의 정수로 $n=4, m=5$를 선택할 때, ㉠과 같이 정의된 함수 $A(x,y)$와 $I(x,y)$에 대하여 근사식 ㉥을 이용하면 정의역 안에서 부등식 $A(x,y)) \ge I(x,y)$를 만족하는 영역은 근사적으로 원들의 내부로 이루어진 영역과 일치한다. 이 원들의 내부 영역으로서 정의역 $\{(x,y) \mid -a/2 \le x \le a/2,\ 0 \le y \le b\}$에 속하는 부분의 넓이의 총합을 구하시오.

(단, $\frac{2-\sqrt{3}}{\pi} \approx 0.0853$으로 계산하시오.)

자연계 논술
출제의도 및 문제해설

[출제 의도]

본교의 2013년 수시 1차 모집 자연계 논술고사는 고등학교 과정을 이수한 학생이 주어진 제시문을 읽고 이해하여 이를 바탕으로 해결할 수 있는 문제들을 다루고 있다. 주어진 제시문을 분석하여 수학적 기본 개념과 과학적 원리를 이해하고, 이를 바탕으로 개념과 원리를 적용하여 현상 및 도표를 분석하는 능력과 논리적으로 설명하는 능력을 평가하는 것이 본교 논술고사의 출제의도이다.

[제시문 1]은 표피색 발현과 관련된 생물학적 현상과 이를 수학적으로 모델화하여 그 패턴을 분석하는 내용을 다루고 있다. 형태형성 과정에서 세포가 배아의 어느 위치에 분포하고 있는가 하는 위치정보와 수정 이후 한 개체가 태어나기까지의 시간 중 어느 특정 발생 시기라는 시간정보를 바탕으로 일어나는 세포증식의 중요성과 유도물질에 의한 유도의 중요성을 설명하고 있다. 체세포분열에 대한 기본 지식을 바탕으로 생명체의 연속성에서 개체발생에 대한 과학적 내용을 이해하는 능력과 문장 이해능력, 논리적 서술능력을 살펴보고자 한다.

[제시문 2]는 사각형 정의역에서 정의된 두 함수에 대한 부등식을 만족하는 영역을 찾는 방법을 설명하고, 그 방법을 이용하여 정의역에 나타나는 무늬가 어떤 모양인지를 살펴보는 과정을 보여주는 제시문이다. 제시문의 설명을 이해하고, 이를 적용하여 문제를 해결하고 논리적으로 서술하는 능력을 살피고자 한다.

[문제 해설]

[문제 1 풀이]

지문 (가)의 내용에 대한 이해를 바탕으로 하고 있는데, 이 질문은 단순히 색깔을 발하는 세포의 수가 검정은 단위면적당 16개 옅은 우윳빛 노란색은 8개의 색소세포를 각각 필요로 하는 것을 가정하고 있다.

검은색을 띄기 위해 필요한 세포 수 16개가 되기 위해서는 15회 세포 분열이 있어야 한다. 한편 옅은 우윳빛 노란색을 띄기 위해 필요한 세포 수 8개가 되기 위해서는 7번의 세포분열이 있어야한다.

따라서 세포분열 횟수의 차는 15 - 7 = 8이다.

주어진 패턴 전체를 만드는데 필요한 세포의 수는 각각 다음과 같다.

검은색 : 16 x 8 = 128개

옅은 우윳빛 노란색 : 8 x 16 = 128개

문제에서 주어진 가정이 모든 세포의 분열 시간이 24시간으로 동일하게 주어져 있으므로, 패턴 전체를 만드는데 걸리는 시간을 24 x n 시간이라고 할 때, $2^n = 128$이 되어야 하므로 n = 7이어야 한다.

따라서 전체면적에서 색을 발하는데 필요한 세포분열에 필요한 시간은 24 x 7 = 168시간이다.

[문제 2 풀이]

(나)의 핵심내용은 '동물 발생의 배아 단계에서 형태형성인자의 농도 의존적인 사전 패턴(pre-patterns)에 관한 반응-확산 시스템에 기초하며, 이후의 세포분열에서 이 사전 패턴에 의거하여 특정 색소세포가 멜라닌을 생성한다.'는 것이다.

이에 대한 근거를 (가) 지문에서 찾으면 다음과 같다.

① 형태가 규정된 상태의 것이 아닌 무형의 상태에서 주어진 위치 정보와 시간 정보를 이용하여 발생과정을 거치면서 일정한 형태를 갖춰 우리가 인식하는 생물체가 될 것이라는 것이다. 이는 매우 흥미로운 추정으로 현대에 와서는 두 번째 것이 개체 발생에서 관찰되는 현상으로 인지되고 있다.
② 외배엽, 중배엽, 내배엽으로 세포가 이동하여 재배치되면서 형태의 변화가 시작된다.
③ 척삭을 기준으로 한 세포의 배열과, 위치 특이적인 특정 유도물질의 발현, 그리고 이들 유도물질의 농도에 따른 유도에 의하여 진행된다.
④ 시기 특이적으로 이미 형성된 특정 구조에 의해 추후의 형태형성이 유도된다.
⑤ 피부의 외형적 형태는 피부를 구성하는 세포들이 어떤 형태로 어떻게 짜여 있고 어떤 물질을 생합성하는 가에 의해 결정된다. 피부라는 국부적 조직의 형태는 3차원이다.
⑥ 이는 검은색을 합성하는 멜라닌 세포와 황색을 합성하는 황색 세포의의 일정한 배열에 의함
⑦ 형태가 규정된 상태의 것이 아닌 무형의 상태에서 주어진 위치 정보를 이용하여 발생과정을 거치면서 일정한 형태를 갖춰 우리가 인식하는 표범이 된다.
⑧ 이동 이후 위치 특이적으로 분열하여 일정 수를 만들고 특정 색소를 분비하는 색소세포로 분화한다.
⑨ 발생의 과정에서 표피 무늬 형성은 개체의 형태가 갖추어지는 형태형성이후 발생단계에서 일어난다.
⑩ 행태형성은 세포들의 배열에 의한 것이다.
⑪ 앞-뒤 축, 등-배 축, 좌-우 축을 중심으로 세포로 구성된 조직, 기관 들이 배열된다.

[문제 3 풀이]

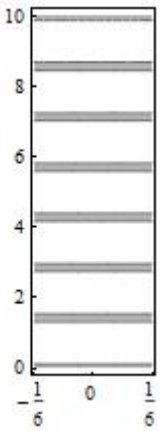
조건 ㉡에서 $0 \le \frac{n^2}{(1/3)^2} + \frac{m^2}{10^2} \le 2$을 만족하는 음이 아닌 정수 n, m은 $n=0$, $m=0, 1, 2, \cdots, 14$ 이다. 따라서 함수 A와 I는 다음과 같다.

$$A(x,y) = \cos\left(\frac{m\pi y}{10}\right), \qquad I(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

그러므로 $m=14$일 때 가장 많은 수의 띠무늬가 나타난다.

이때 $\cos\left(\frac{14\pi y}{10}\right) = \cos\left(\frac{7\pi y}{5}\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$으로부터 정의역 안에서 부등식 $0 \le \frac{7y}{5} \le \frac{1}{6}$, $2k - \frac{1}{6} \le \frac{7y}{5} \le 2k + \frac{1}{6}$ $(k=1, 2, \cdots, 6)$, $14 - \frac{1}{6} \le \frac{7y}{5} \le 14$ 을 만족하는 부분들이다.

즉, $0 \le y \le \frac{5}{42}$, $\frac{10}{7}k - \frac{5}{42} \le y \le \frac{10}{7}k + \frac{5}{42}$ $(k=1, 2, \cdots, 6)$, $10 - \frac{5}{42} \le y \le 10$ 을 만족하는 부분들이다.



[문제 4 풀이]

$|\cos(\pi x)| \le 1$, $|\cos(\pi y)| \le 1$이므로, 부등식 ㉢을 만족하는 영역에 속하는 모든 점 (x, y)에서

$$|\cos(\pi x)| \ge \cos(\pi x)\cos(\pi y) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad |\cos(\pi y)| \ge \cos(\pi x)\cos(\pi y) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이 성립하므로,

$$\cos(\pi x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(\pi y) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이거나, 또는

$$\cos(\pi x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(\pi y) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이어야 한다.

그러므로 부등식 ㉣을 만족하는 점 (x, y)는

$$|\pi x - 2k_1\pi| \leq \frac{\pi}{6}, \quad |\pi y - 2k_2\pi| \leq \frac{\pi}{6} \quad (k_1,\ k_2\text{는 정수}) \quad \text{.....㉤}$$

이거나, 또는

$$|\pi x - (2k_1+1)\pi| \leq \frac{\pi}{6}, \quad |\pi y - 2(k_2+1)\pi| \leq \frac{\pi}{6} \quad (k_1,\ k_2\text{는 정수}) \quad \text{.....㉥}$$

을 만족해야 한다.

[문제 5 풀이]

$a=8,\ b=10$이고 $n=4, m=5$인 경우 함수 A와 I는 다음과 같다.

$$A(x,y) = \cos\left(\frac{4\pi x}{8}\right)\cos\left(\frac{5\pi y}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right), \qquad I(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $A(x,y) \geq I(x,y)$인 영역에 속하는 점 (x,y)는 부등식

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

을 만족해야 한다. 그리고 $k_1,\ k_2$가 정수일 때,

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{2} - 2k_1\pi\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2} - 2k_2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{2} - (2k_1+1)\pi\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2} - (2k_2+1)\pi\right)$$

이다. 따라서 $A(x,y) \geq I(x,y)$인 영역은 근사식 ㉦을 이용하면 부등식

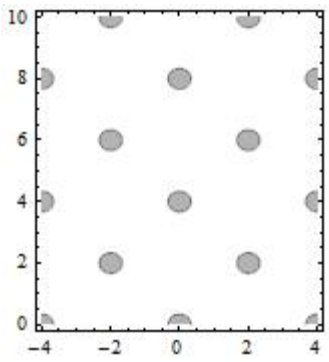
$$\left(\frac{\pi x}{2} - 2k_1\pi\right)^2 + \left(\frac{\pi y}{2} - 2k_2\pi\right)^2 \leq 2 - \sqrt{3} \quad \text{또는} \quad \left(\frac{\pi x}{2} - (2k_1+1)\pi\right)^2 + \left(\frac{\pi y}{2} - (2k_2+1)\pi\right)^2 \leq 2 - \sqrt{3}$$

을 만족하는 영역과 근사적으로 일치한다. 즉, 정수 $k_1,\ k_2$에 대하여

$$(x - 4k_1)^2 + (y - 4k_2)^2 \leq \frac{2^2(2-\sqrt{3})}{\pi^2} \quad \text{또는} \quad (x - 2(2k_1+1))^2 + (y - 2(2k_2+1))^2 \leq \frac{2^2(2-\sqrt{3})}{\pi^2}$$

을 만족하는 영역과 근사적으로 일치한다.

따라서 정의역 안에서 부등식 $A(x,y) \geq I(x,y)$를 만족하는 영역을 근사적으로 나타내는 원들의 중심은 (2×짝수, 2×짝수), (2×홀수, 2×홀수)이고, 반지름을 r이라 하면 $r^2 = \frac{2^2(2-\sqrt{3})}{\pi^2}$이다.



이 원들의 내부 영역으로 정의역 $\{(x,y) \mid -4 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 10\}$에 속하는 부분의 넓이의 총합은 원 10개의 넓이이므로

$$10\pi r^2 = 10\pi \times \frac{2^2(2-\sqrt{3})}{\pi^2} = \frac{40(2-\sqrt{3})}{\pi} \approx 40 \times 0.0853 = 3.412$$

이다.